Μάθημα....................	:	**Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών** (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων)
Ακαδημαϊκό Έτος..........	:	**2018 - 2019**
Περιεχόμενο................	:	**Εξεταστική Ιανουαρίου (24 ΙΑΝ 2019)**
Ημερομηνία Στοιχειοθεσίας	:	2019/08/28 (ώρα 21:16:34)
Δημιουργήθηκε από.......	:	Κυριάκος Γ. Μαυρίδης
Ηλεκτρονικό Ταχυδρομείο	:	• kyriakos.g.mavridis@gmail.com • kmavridi@uoi.gr
Ιστοσελίδα..................	:	http://users.uoi.gr/kmavridi/
Άδεια Χρήσης..............	:	

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Α. ΤΟΛΙΑΣ, Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ, 24/1/2019

Θέμα 1. [1 μον.]
Αν $\sin x = \frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του $\frac{x}{2}$.

Θέμα 2. [1 μον.]
Αν η πρόταση $p \wedge [\sim (q \Rightarrow r)]$ είναι αληθής να δειχθεί ότι η πρόταση $(p \Leftrightarrow q) \vee r$ είναι αληθής. Ισχύει το αντίστροφο; [Υπόδειξη: Να κάνετε ένα κοινό πίνακα αλήθειας για τις παραπάνω προτάσεις].

Θέμα 3. [2 μον.]
(α) Η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $A_1 = \{\emptyset\}$ και $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n)\setminus A_n$. Να υπολογίσετε τα σύνολα A_2, A_3 και $\mathcal{P}(A_3)$.
(β) Αν M, N δύο σύνολα, δείξτε ότι

$$(x, y) \notin M \times N \Leftrightarrow x \notin M \vee y \notin N.$$

(γ) Αν K, Λ, M, N είναι τέσσερα σύνολα, δείξτε ότι

$$(K \times \Lambda) \setminus (M \times N) = (K \times (\Lambda \setminus N)) \cup (K \setminus M) \times \Lambda).$$

Θέμα 4. [2 μον.]
(α) Αν X, Y είναι δύο μη κενά σύνολα, $\{A_1, A_2\}$ μια διαμέριση του X και $\{B_1, B_2, B_3\}$ μια διαμέριση του Y να δείξετε ότι η $\left\{A_i \times B_j : \, i \in \{1,2\}, \, j \in \{1,2,3\}\right\}$ είναι μια διαμέριση του $X \times Y$.
(β) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής:

$$x\sigma y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \, y = kx.$$

Να δείξετε ότι η σ είναι σχέση διάταξης η οποία δεν είναι γραμμική (ολική).

Θέμα 5. [2 μον.]
(α) Αν η $f : M \to N$ είναι επί να δείξετε ότι για κάθε $B \subseteq N$ ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$.
(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $f(x) = x^2$.
(i) Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$ και αν είναι επί.
(ii) Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ να υπολογίσετε τα σύνολα $f(A)$, $f^{-1}(A)$, $f(f^{-1}(A))$, $f^{-1}(f(A))$.

Θέμα 6. [1,5 μον.]
(α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών.
(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $0 < x < y$ να δείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{Q}$ και $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ώστε $x < a^3 < \beta^4 < y$.

Θέμα 7. [1,5 μον.]
(α) Να δείξετε ότι $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$.
(β) Έστω A τυχόν σύνολο και $\beta, \gamma \in A$ με $\beta \neq \gamma$. Να βρείτε μια συνάρτηση $f : A \setminus \{\beta\} \to A \setminus \{\gamma\}$ η οποία να είναι $1-1$ και επί.

Καλή επιτυχία!

24 ΙΑΝ 2019

ΘΕΜΑ 1

Γενικα ισχυει

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

Εχουμε

$$\sin x = \sin\left(2\,\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

Οποτε

$$\left(\sin x\right)^2 = 4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(1-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

Σε αυτην την εξισωση γνωριζουμε την τιμη του $\sin x$ και ζητουμενο ειναι η τιμη του $\sin\frac{x}{2}$. Για ευκολια θετουμε $y=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

Ετσι $$\left(\frac{12}{13}\right)^2 = 4y\,(1-y)$$

$$= 4y - 4y^2$$

άρα

$$4y^2 - 4y + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 0.$$

Έχουμε

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 4^2\left[1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2\right]$$

$$= 4^2 \frac{13^2 - 12^2}{13^2} = 4^2 \frac{169 - 144}{13^2}$$

$$= 4^2 \frac{5^2}{13^2} = \left(\frac{4 \cdot 5}{13}\right)^2$$

και

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \frac{4 \cdot 5}{13}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \frac{5}{13}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{13 - 5}{13} = \frac{8}{2 \cdot 13} = \frac{4}{13}.$$

Συνεπώς $\sin\frac{x}{2} = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$. Όμως

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$, συνεπώς $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ και έτσι

Το $\sin\frac{x}{2}$ είναι θετικό, άρα τελικά

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Επίσης, από τη σχέση $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1$

έχουμε

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{1-\frac{4}{13}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{13-4}{13}}$$

$$= \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Όμως $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ άρα το $\cos\frac{x}{2}$ είναι

θετικό συνεπώς

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

2c

Τέλος, έχουμε

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{\frac{3\sqrt{13}}{13}} = \frac{2}{3}$$

και

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$\sim(q \Rightarrow r)$	$p \wedge [\sim(q \Rightarrow r)]$	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α	α	ψ	$\boxed{\psi}$	α
α	α	ψ	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α	ψ	ψ	ψ
ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α

$(p \Leftrightarrow q) \vee r$
$\boxed{\alpha}$
α
α
ψ
α
ψ
α
α

Συνεπως δεν ισχυει.

Προς τα δεξια ισχυει.

ΘΕΜΑ 3

(a)

$$A_2 = P(A_1) \setminus A_1 = P(\{\emptyset\}) \setminus \{\emptyset\}$$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$$

$$= \{\{\emptyset\}\}$$

$$A_3 = P(A_2) \setminus A_2 = P(\{\underbrace{\{\emptyset\}}\}) \setminus \{\{\emptyset\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$$

$$P(A_3) = P(\{\underbrace{\emptyset}_{a}, \underbrace{\{\{\emptyset\}\}}_{b}\})$$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

(5)

(β) $(x,y) \notin M \times N$

$\Leftrightarrow \sim \left[(x,y) \in M \times N \right]$

$\Leftrightarrow \sim \left[x \in M \wedge y \in N \right]$

$\Leftrightarrow (\sim x \in M) \vee (\sim y \in N)$

(γ) $(x,y) \in \left[K \times (\Lambda \setminus N) \right] \cup \left[(K \setminus M) \times \Lambda \right]$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x,y) \in K \times (\Lambda \setminus N) \\ \vee \\ (x,y) \in (K \setminus M) \times \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \in K \wedge y \in \Lambda \setminus N \\ \vee \\ x \in K \setminus M \wedge y \in \Lambda \end{pmatrix}$$

6a

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x\in K \wedge y\in\Lambda \wedge y\notin N \\ \vee \\ x\in K \wedge x\notin M \wedge y\in\Lambda \end{array} \right)$$

$$(x,y)\ (K\times\Lambda)\setminus(M\times N)$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in K\times\Lambda \wedge (x,y)\notin M\times N$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (x\in K \wedge y\in\Lambda) \\ \wedge \\ (x\notin M \vee y\notin N) \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (x\in K \wedge y\in\Lambda \wedge y\in N) \\ \vee \\ (x\in K \wedge y\in\Lambda \wedge x\notin M) \end{array} \right)$$

Δευτερα μελη ισα αρα και πρωτα.

ΘΕΜΑ 4

(6β)

(α) • Έστω $(x,y) \in X \times Y$. Τότε $x \in X$ και $y \in Y$. Άρα $\{A_1, A_2\}$ διαμέριση του X, υπάρχει $i_A \in \{1,2\}$ τέτοιο ώστε $x \in A_{i_A}$. Ομοίως υπάρχει $j_B \in \{1,2,3\}$ τ.ω. $y \in B_{j_B}$. Άρα $(x,y) \in A_{i_A} \times B_{j_B}$.

Συνεπώς η ( ) είναι κάλυψη του $A \times B$.

• Έστω $i_1, i_2 \in \{1,2\}$ με $i_1 \neq i_2$ και $j_1, j_2 \in \{1,2,3\}$ με $j_1 \neq j_2$. Θ.δ.ο. $(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) \neq \emptyset$

Έστω ότι υπάρχει $(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})$

Τότε $(x,y) \in A_{i_1} \times B_{j_1}$ και $(x,y) \in A_{i_2} \times B_{j_2}$.

συνεπώς

$x \in A_{i_1} \wedge y \in B_{j_1} \wedge x \in A_{i_2} \wedge y \in B_{j_2}$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι $\{A_1, A_2\}$ και $\{B_1, B_2, B_3\}$ είναι διαμερίσεις.

(β)

- <u>ανακλ.</u> για τυχόν $x \in \mathbb{N}$ και για $k=1$ έχουμε

$$x = 1 \cdot x \quad \text{άρα} \quad x \sigma x$$

- <u>αντισυμ.</u>

$$\left.\begin{matrix} x\sigma y \\ y \sigma x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = k_1 x \\ x = k_2 y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = k_1 k_2 y$$

άρα $k_1 \cdot k_2 = 1$ και αφού $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, αναγκαστικά $k_1 = k_2 = 1$.

- <u>μεταβ.</u>

$$\left.\begin{matrix} x\sigma y \\ y \sigma 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = k_1 x \\ 2 = k_2 y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 = k_1 k_2 x$$

αφού $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ υποχρεωτικά και $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$

άρα $x \sigma x$.

- <u>όχι ολική</u> για $x=2$ και $y=3$ δεν υπάρχει προφανώς $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y = kx$ ή $x = ky$.

ΘΕΜΑ 5

(α) • Έστω $y \in f(f^{-1}(B))$. Τότε

$\exists x \in f^{-1}(B)$ τ.ω. $f(x) = y$

Όμως αφού $x \in f^{-1}(B)$ υπάρχει

$z \in B$ τ.ω. $f(x) = z$

Όμως $f(x) = y$ άρα $y = z$ και αφού $z \in B$

έχουμε τελικά ότι $y \in B$. Άρα

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

• Έστω $y \in B$. Τότε επειδή η f είναι

επι, υπάρχει $x \in M$ τ.ω. $f(x) = y$

Προφανώς $x \in f^{-1}(B)$, οπότε αφού

$y = f(x)$, το y ανήκει στο $f(f^{-1}(B))$

Άρα $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

(b)-(i) Δεν είναι "1-1" γιατί

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$$

Επίσης, δεν είναι επί γιατί για $y = 3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ <u>δεν</u> υπάρχει $x \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $f(x) = y = 3$.

Σημειώνουμε ότι για το $x = \sqrt{y}$ έχουμε ότι $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y = 3$, αλλά το $\sqrt{y}$ <u>δεν</u> είναι ακέραιος, δηλαδή <u>δεν</u> ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(b)-(ii)

- $f(A) = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\} = \{1, 4, 9, 16\}$
- $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 3 \vee x^2 = 4\}$

$$= \{-1, 1, -2, 2\}$$

Σημειώνουμε ότι τα $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$ και $\sqrt{3}$ δεν είναι ακέραιοι, άρα δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

10

- $f(f^{-1}(A)) = f(\{-1, 1, -2, 2\})$

  $= \{1, 4\}$

- $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{1, 4, 9, 16\})$

  $= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1 \vee x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \vee x^2 = 16\}$

  $= \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4\}$

ΘΕΜΑ 6

(α) "Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x < n$."

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε $\exists\, y \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\forall k \in \mathbb{N}$ να ισχύει $y \geq k$. Άρα όλοι οι φυσικοί είναι μικρότεροι ή ίσοι του y, συνεπώς το y είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Αφού το $\mathbb{N}$ είναι α.φ. έχει supremum. Συνεπώς

$$\lambda \leq \sup \mathbb{N}, \ \forall \lambda \in \mathbb{N}$$

Αλλά οι φυσικοί αριθμοί έχουν από τον τρόπο ορισμού τους την ιδιότητα

$$\lambda \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda + 1 \in \mathbb{N}$$

άρα ο $\lambda + 1$ ως φυσικός πρέπει και αυτός να ικανοποιεί τη σχέση $\lambda + 1 \leq \sup A$.

Έτσι $\lambda \leq (\sup A) - 1$

όπου το $(\sup A) - 1$ είναι α.φ. του $\mathbb{N}$

προφανώς γνήσια μικρότερο του $\sup A$.

Αυτό είναι άτοπο. Συνεπώς η ζητούμενη σχέση ισχύει.

(β) Θα βασιστούμε στο Θεώρημα: (β. βιβλίο Τσαμάτου, σελ 142, Θεωρ. 5.8.2)

"Δοθέντων δύο πραγματικών αριθμών x, y με $x < y$, υπάρχουν ρητός αριθμός r και άρρητος αριθμός s τέτοιοι ώστε

$$x < r < y \text{ και } x < s < y \text{"}$$

Αφού $0 < x < y$, έχουμε $0 < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$, συνεπώς για το διάστημα $(\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$ από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{Q}$ με $\sqrt[3]{x} < a < \sqrt[3]{y}$. Έτσι $x < a^3 < y$.

Στη συνέχεια, δουλεύουμε στο διάστημα $(\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[4]{y})$ και από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τ.ω. $\sqrt[4]{a^3} < \beta < \sqrt[4]{y}$. Έτσι $a^3 < \beta^4 < y$.

Άρα τελικά έχουμε

$$0 < x < a^3 < \beta^2 < y.$$

(Παρόμοια με φυλλάδιο 5, άσκηση 10)

ΘΕΜΑ 7

(α) Η συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} 2|x|, & \text{αν } x \le 0 \\ 2x-1, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Είναι "1-1" και επί. Πράγματι

• "1-1" Ας είναι $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $k_1 \neq k_2$. Τότε

* $k_1 \le 0$ και $k_2 \le 0$: $f(k_1)=2|k_1|=-2k_1$
$f(k_2)=2|k_2|=-2k_2$

οπότε από την υπόθεση ότι $k_1 \neq k_2$ έχουμε ότι $f(k_1) \neq f(k_2)$

* $k_1>0$ και $k_2>0$: $f(k_1)=2k_1-1$,

$f(k_2)=2k_2-1$, οπότε από την υπόθεση ότι $k_1 \neq k_2$ έχουμε ότι $f(k_1) \neq f(k_2)$.

* $k_1 \le 0$ και $k_2>0$: $f(k_1)=2|k_1|=-2k_1$ (άρτιος)
$f(k_2)=2k_2-1$ (περιττός) οπότε $f(k_1) \neq f(k_2)$

* $k_1 > 0$ και $k_2 \leq 0$: (παρόμοια με το προηγούμενο)

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(k_1) \neq f(k_2)$, συνεπώς αυτή είναι "1-1".

- "Επί" Ας είναι $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο n είναι ή άρτιος ή περιττός.

* n άρτιος: $\exists \lambda_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n = 2\lambda_1$, οπότε $n = 2|-\lambda_1| = f(-\lambda_1)$

Άρα $f(-\lambda_1) = n$.

* n περιττός: $\exists \lambda_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n = 2\lambda_2 - 1$,

οπότε $n = f(\lambda_2)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ τ.ω. $f(\lambda) = n$, συνεπώς αυτή είναι επί.

(β) <u>ΔΙΟΡΘΩΣΗ</u>: $f : A \setminus \{β\} \to A \setminus \{γ\}$

Μια τετοια συναρτηση ειναι η

$f : A \setminus \{β\} \to A \setminus \{γ\}$ με τυπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq β \text{ και } x \neq γ \\ β, & x = γ \\ γ, & x = β. \end{cases}$$

Για την αποδειξη του "1-1", παιρνουμε $y, z \in A \setminus \{β\}$ με $y \neq z$, και συγκεκριμενα τις περιπτωσεις

- $y \in A \setminus \{β, γ\}$ και $z \in A \setminus \{β, γ\}$
- $y \in A \setminus \{β, γ\}$ και $z = β$
- $y \in A \setminus \{β, γ\}$ και $z = γ$
- $y = β$ και $z \in A \setminus \{β, γ\}$
- $y = γ$ και $z \in A \setminus \{β, γ\}$
- $y = β$ και $z = γ$
- $y = γ$ και $z = β$